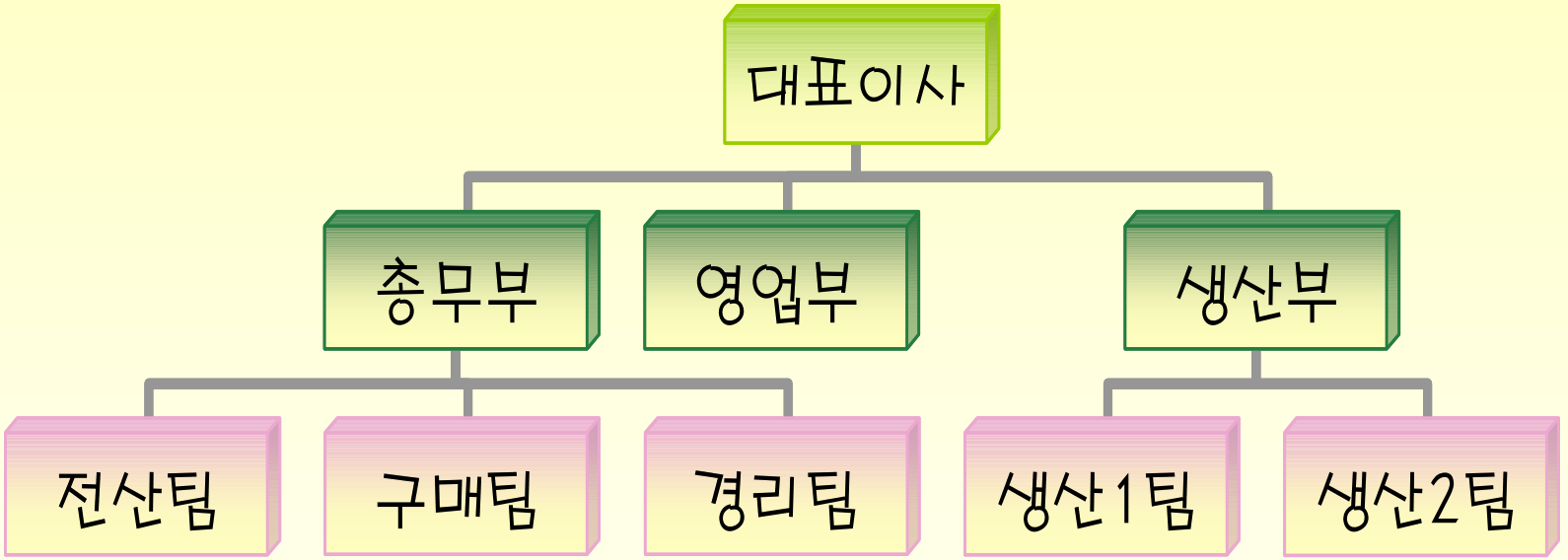
CHAP 7:트리

트리(TREE)

- 트리: 계층적인 구조를 나타내는 자료구조
  - 리스트, 스택, 큐 등은 선형 구조
- 트리는 부모-자식 관계의 노드들로 이루어진다.
- 응용분야:
  - 계층적인 조직 표현
  - 컴퓨터 디스크의 디렉토리 구조
  - 인공지능에서의 결정트리 (decision tree)

회사의 조직



파일 디렉토리 구조

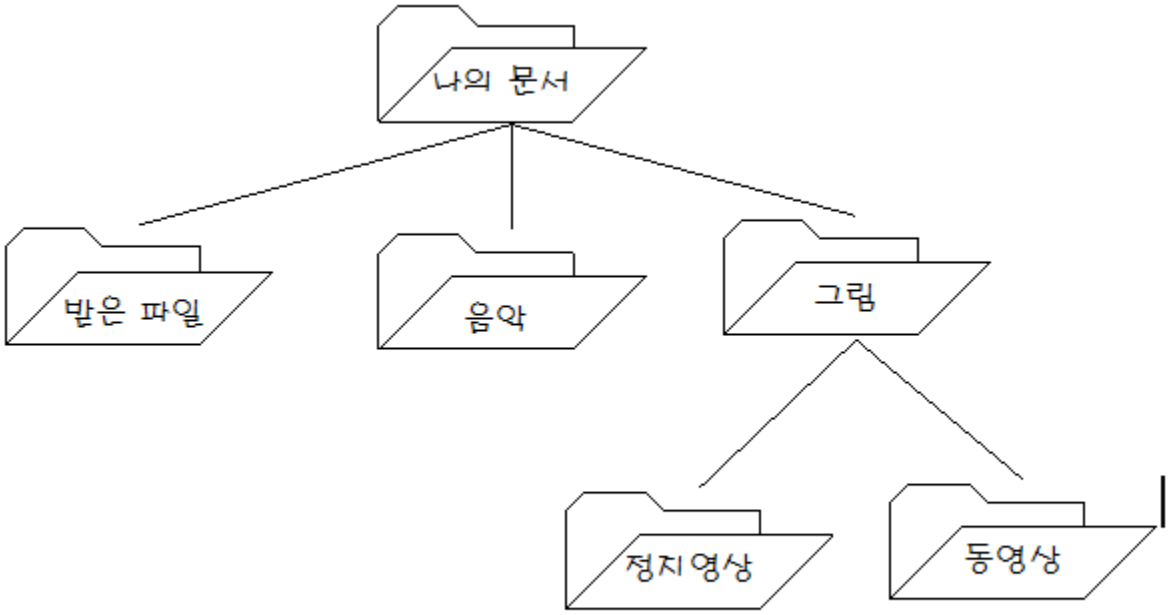


그림 7.2 트리의 예: 컴퓨터 디렉토리

결정 트리

- (예) 골프에 대한 결정 트리

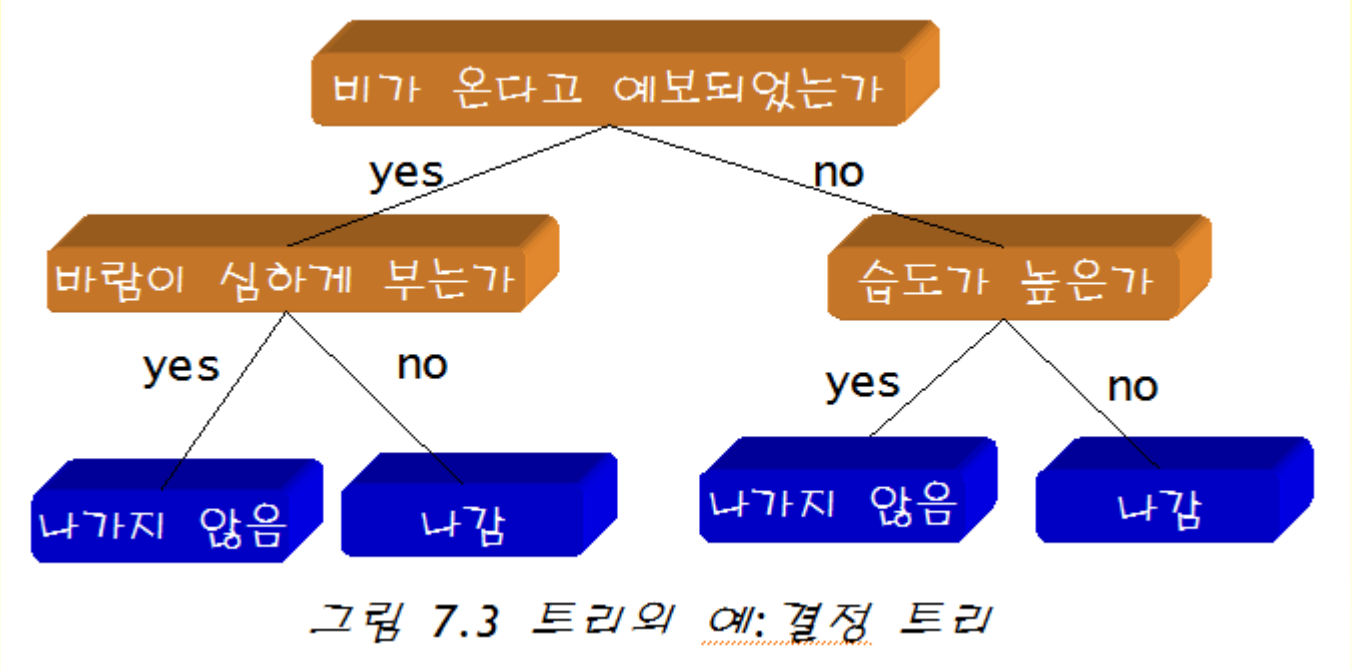
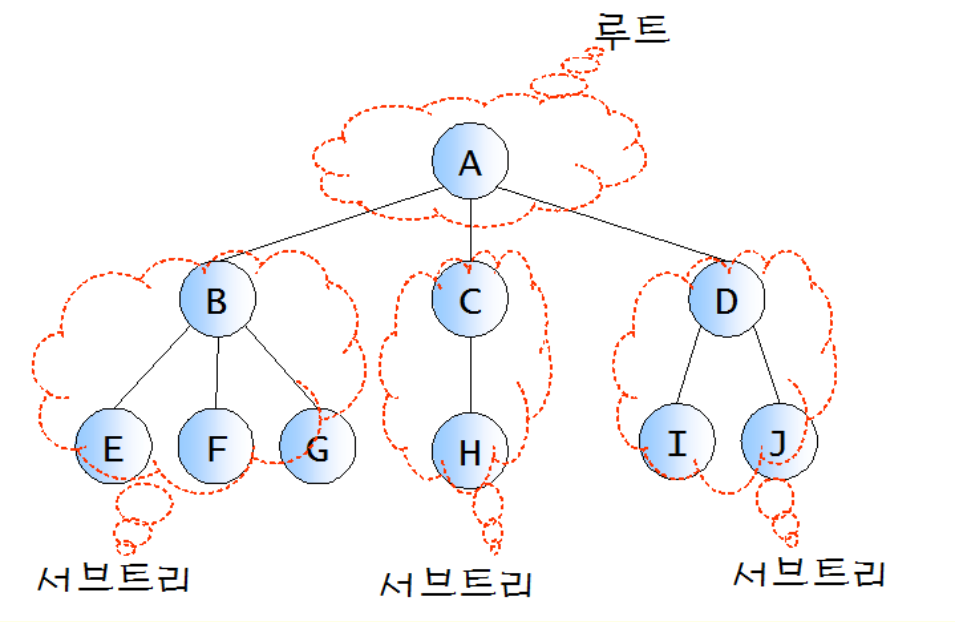


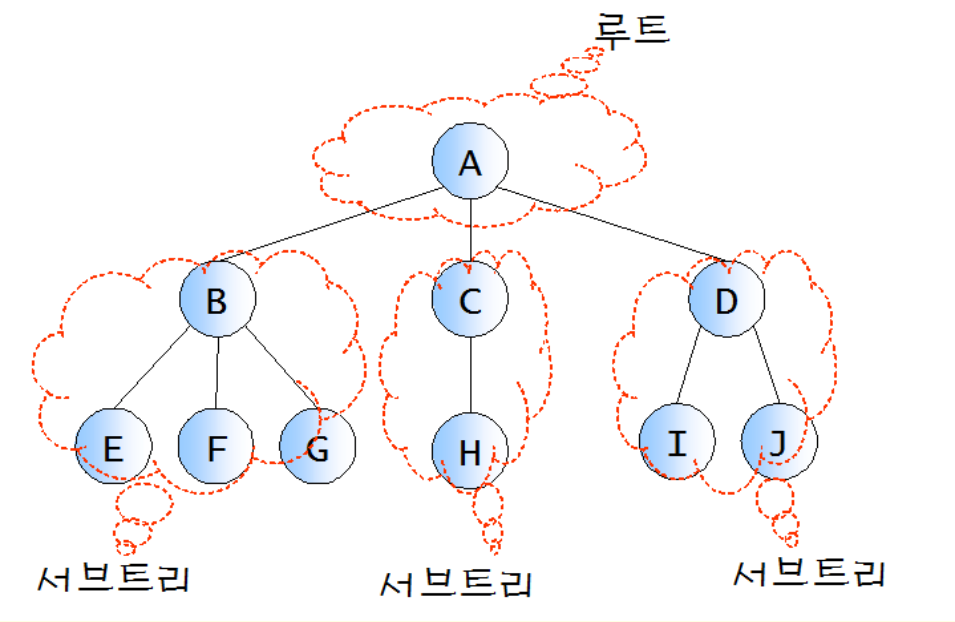
그림 7.3 트리의 예: 결정 트리

트리의 용어



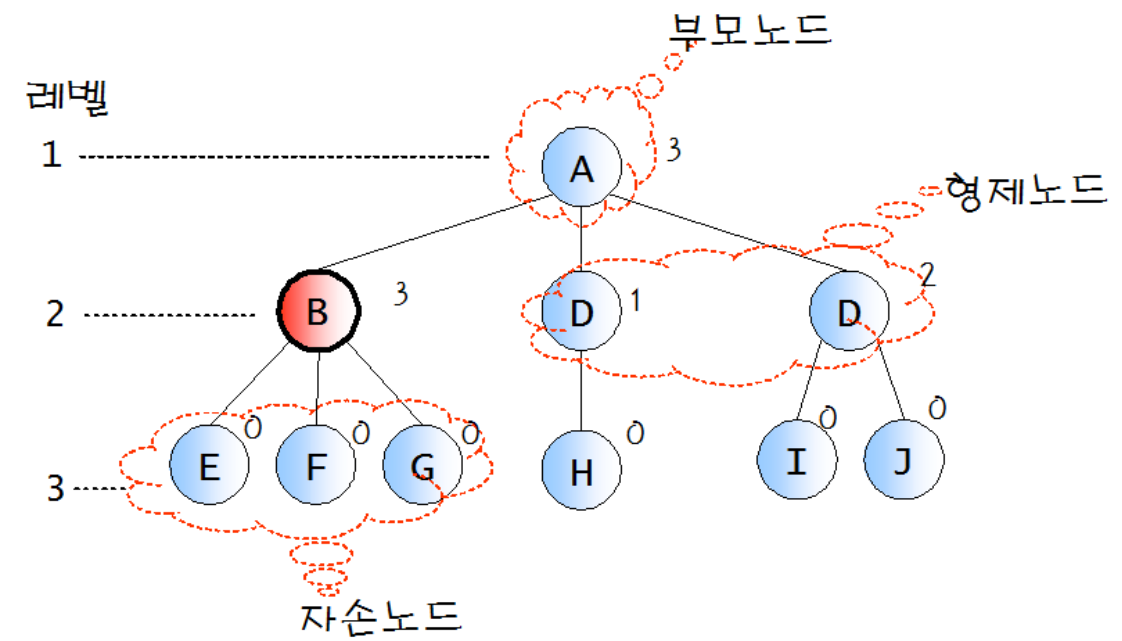
- 노드(node): 트리의 구성요소
- 루트(root): 부모가 없는 노드(A)
- 서브트리(subtree): 하나의 노드와 그 노드들의 자손들로 이루어진 트리

트리의 용어



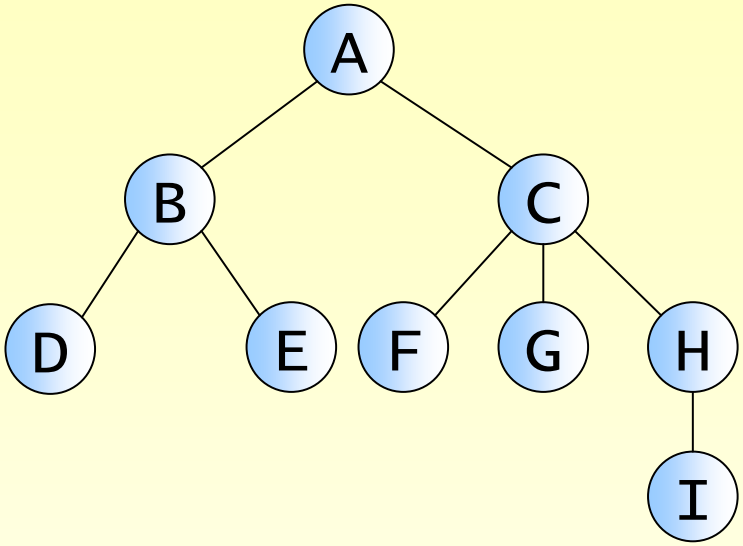
- 단말노드(terminal node): 자식이 없는 노드(A,B,C,D)
- 비단말노드: 적어도 하나의 자식을 가지는 노드(E,F,G,H,I,J)

트리의 용어



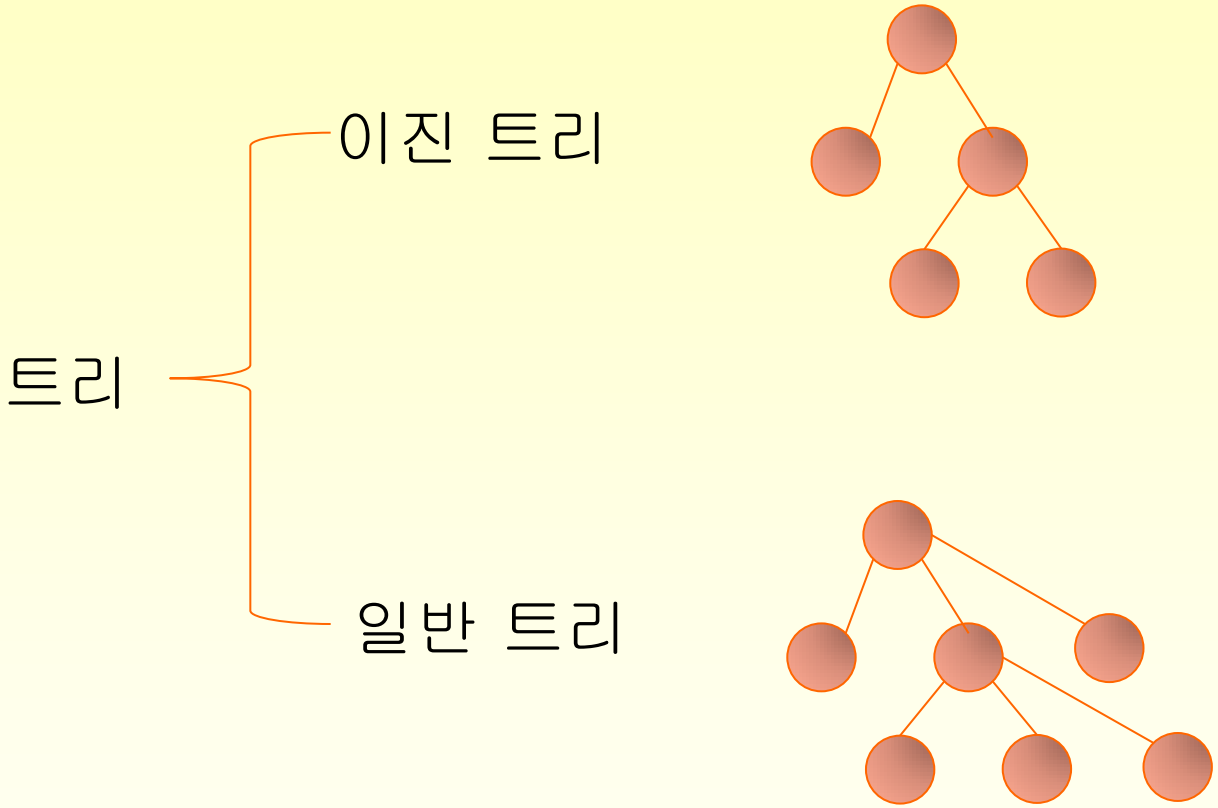
- 자식, 부모, 형제, 조상, 자손 노드: 인간과 동일
- 레벨(level): 트리의 각층의 번호
- 높이(height): 트리의 최대 레벨(3)
- 차수(degree): 노드가 가지고 있는 자식 노드의 개수

예제



- A는 루트 노드이다.
- B는 D와 E의 부모노드이다.
- C는 B의 형제 노드이다.
- D와 E는 B의 자식노드이다.
- B의 차수는 2이다.
- 위의 트리의 높이는 4이다.

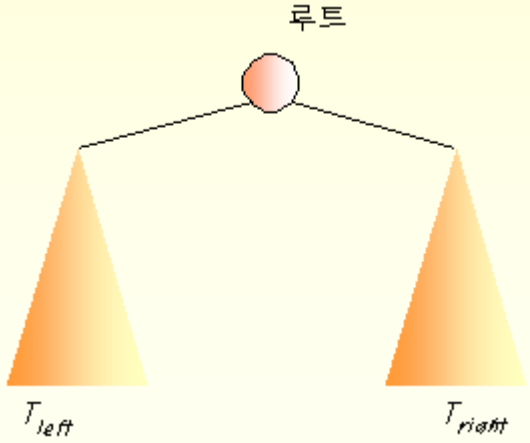
트리의 종류



이진 트리 (binary tree)

- **이진 트리(binary tree) :** 모든 노드가 2개의 서브 트리를 가지고 있는 트리
  - 서브트리는 공집합일수 있다.

- 이진트리의 노드에는 최대 2개까지의 자식 노드가 존재
- 모든 노드의 차수가 2 이하가 된다-> 구현하기가 편리함
- 이진 트리에는 서브 트리간의 순서가 존재



이진 트리 검증

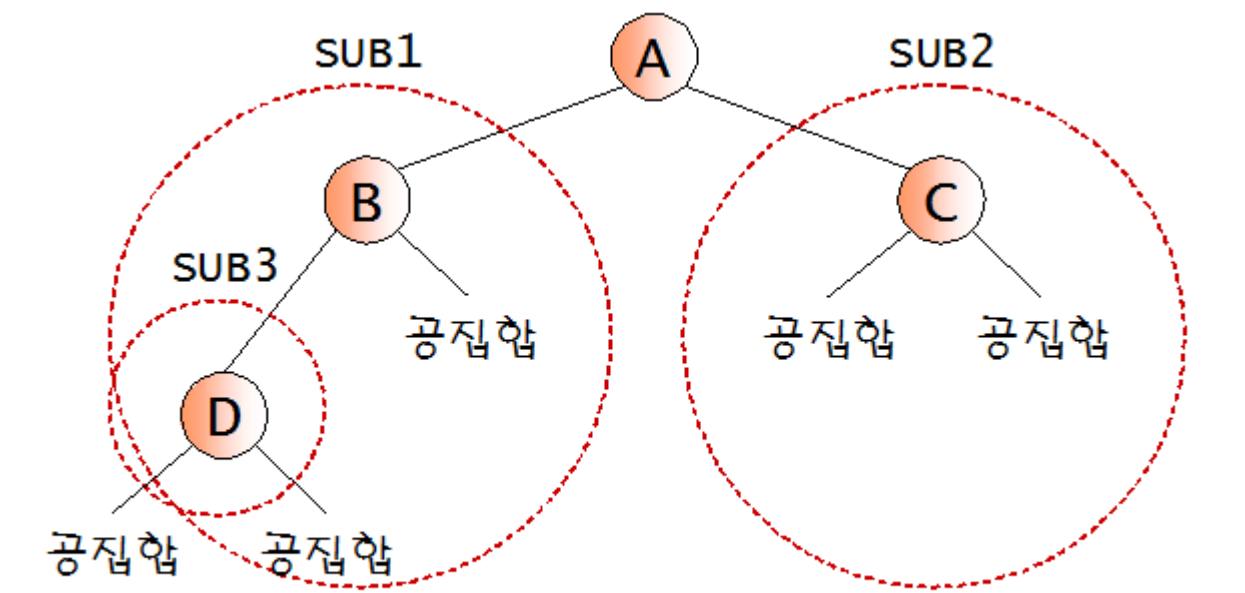


그림 7.8 이진트리 검증

- 이진 트리는 공집합이거나
- 루트와 왼쪽 서브 트리, 오른쪽 서브 트리로 구성된 노드들의 유한 집합으로 정의된다. 이진 트리의 서브 트리들은 모두 이진 트리이어야 한다.

이진 트리의 성질

- 노드의 개수가 n개이면 간선의 개수는 n-1

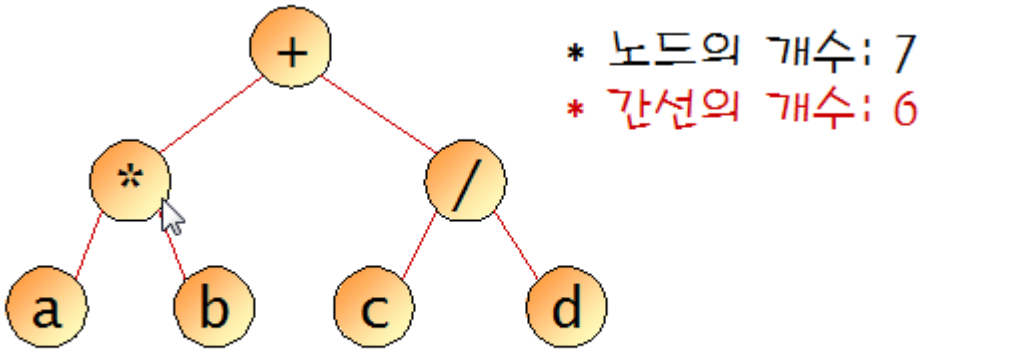
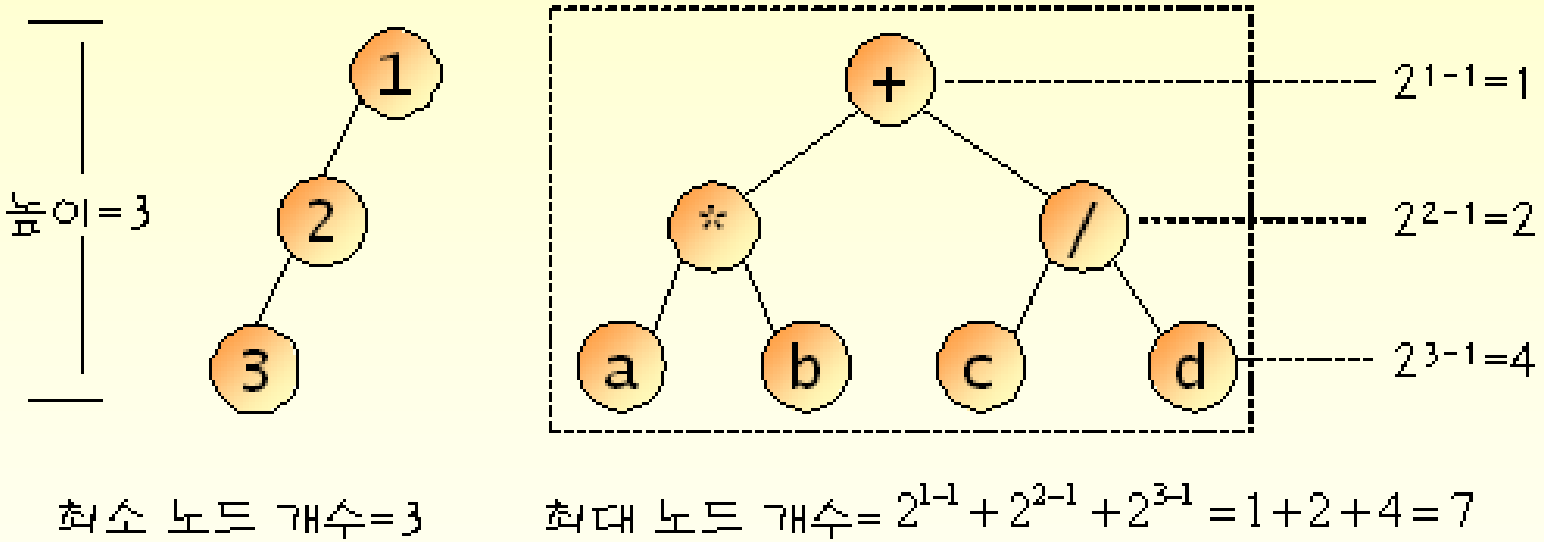


그림 7.10 노드의 개수와 간선의 개수와의 관계

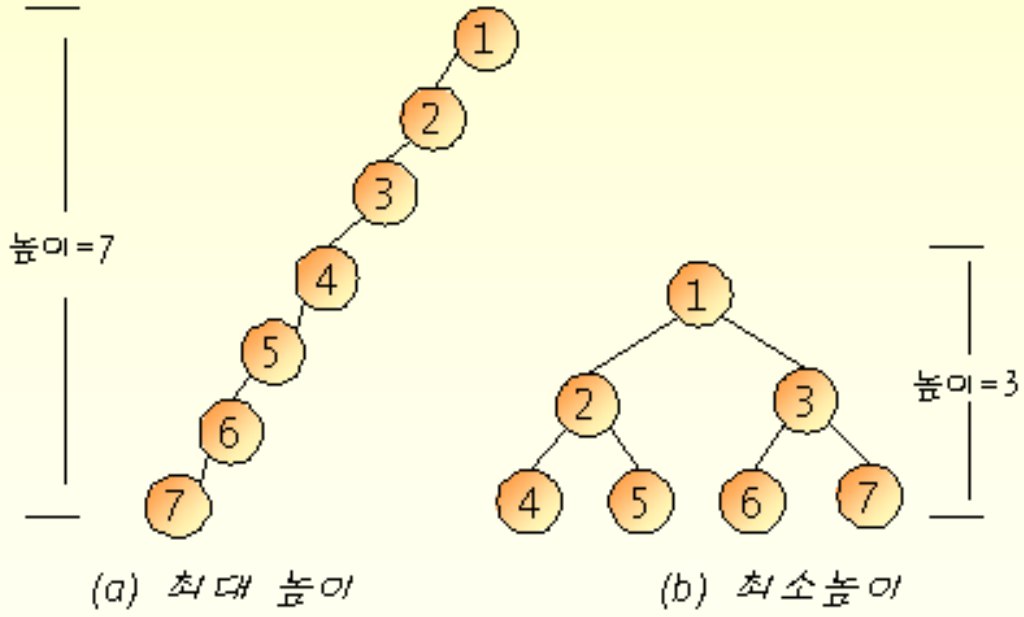
이진트리의 성질

- 높이가 h인 이진트리의 경우, 최소 h개의 노드를 가지며 최대 2^h-1개의 노드를 가진다.



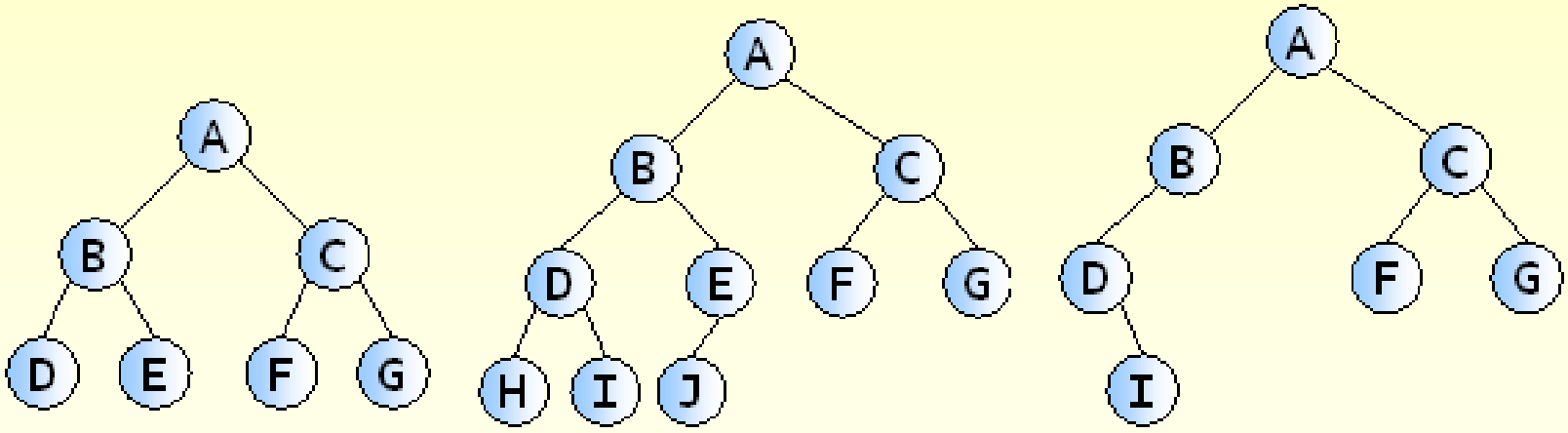
이진 트리의 성질

- n개의 노드를 가지는 이진트리의 높이
  - 최대 n
  - 최소 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$



이진 트리의 분류

- 포화 이진 트리(full binary tree)
- 완전 이진 트리(complete binary tree)
- 기타 이진 트리



(a) 포화 이진 트리 (b) 완전 이진 트리 (c) 기타 이진 트리

포화 이진 트리

- 용어 그대로 트리의 각 레벨에 노드가 꽉 차있는 이진트리를 의미한다.

$$\text{전체 노드 개수} : 2^{1-1}+2^{2-1}+2^{3-1}+\ldots+2^{k-1}=\sum_{i=0}^{k-1}2^i=2^k-1$$

- 포화 이진 트리에는 다음과 같이 각 노드에 번호를 붙일 수 있다.

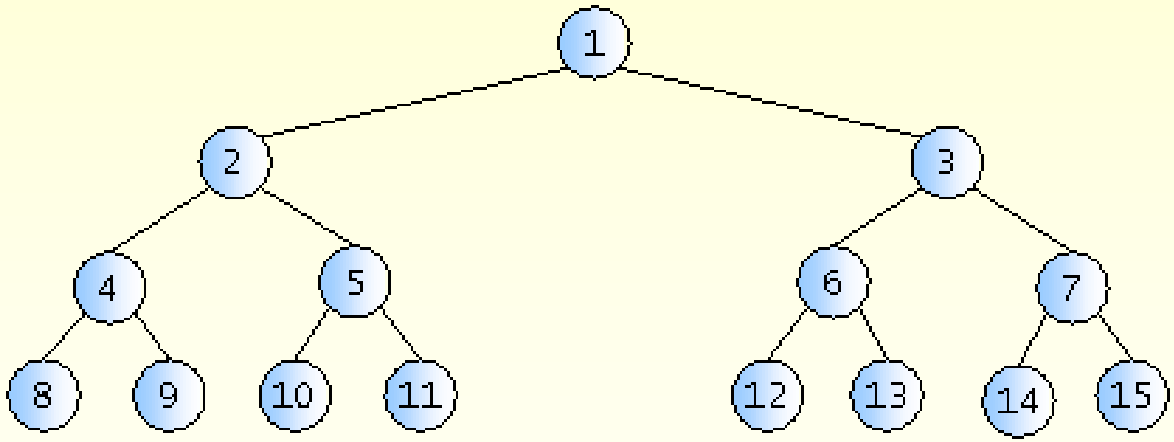


그림 7.15 포화이진트리에서의 노드의 번호

완전 이진 트리

- **완전 이진 트리(complete binary tree)**: 레벨 1부터 k-1까지는 노드가 모두 채워져 있고 마지막 레벨 k에서는 왼쪽부터 오른쪽으로 노드가 순서대로 채워져 있는 이진트리

- 포화 이진 트리와 노드 번호가 일치

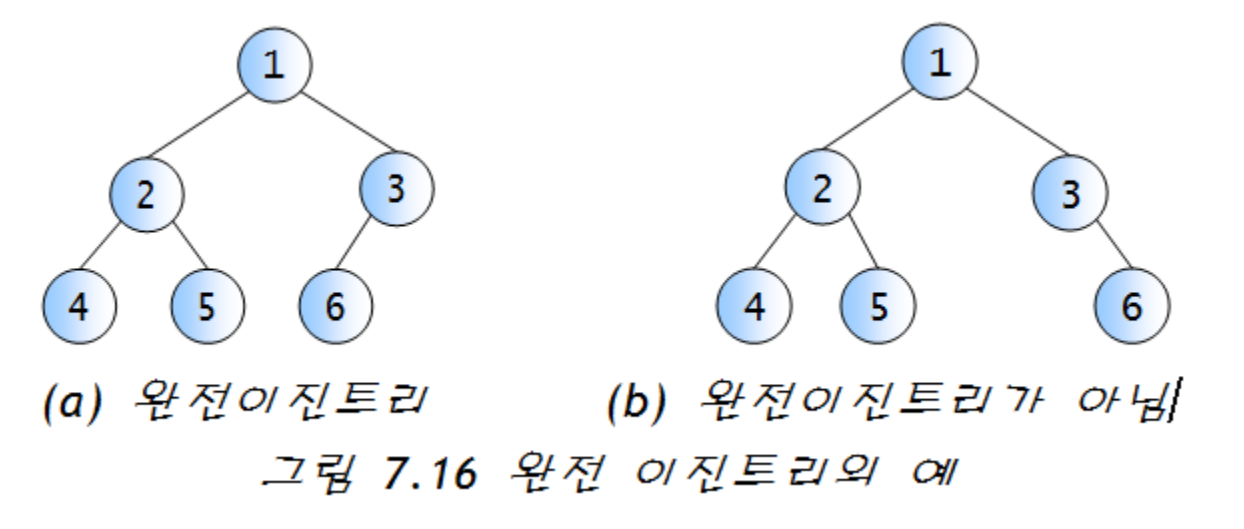


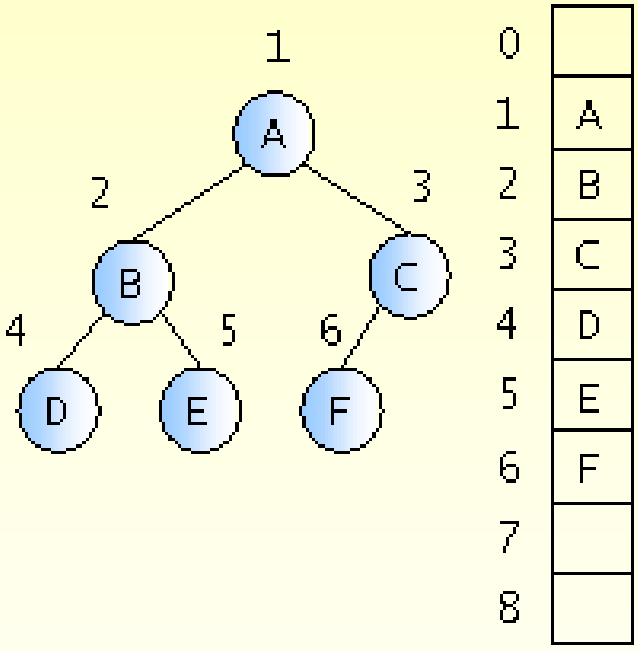
그림 7.16 완전 이진트리의 예

이진 트리의 표현

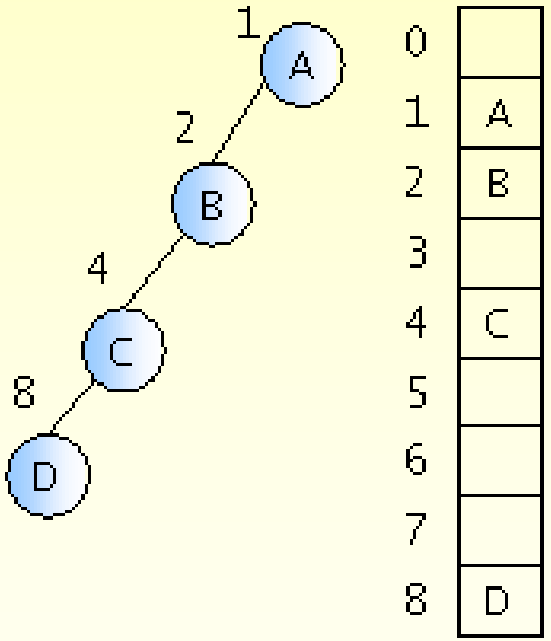
- 배열을 이용하는 방법
- 포인터를 이용하는 방법

배열 표현법

- 배열표현법: 모든 이진 트리를 포화 이진 트리라고 가정하고 각 노드에 번호를 붙여서 그 번호를 배열의 인덱스로 삼아 노드의 데이터를 배열에 저장하는 방법



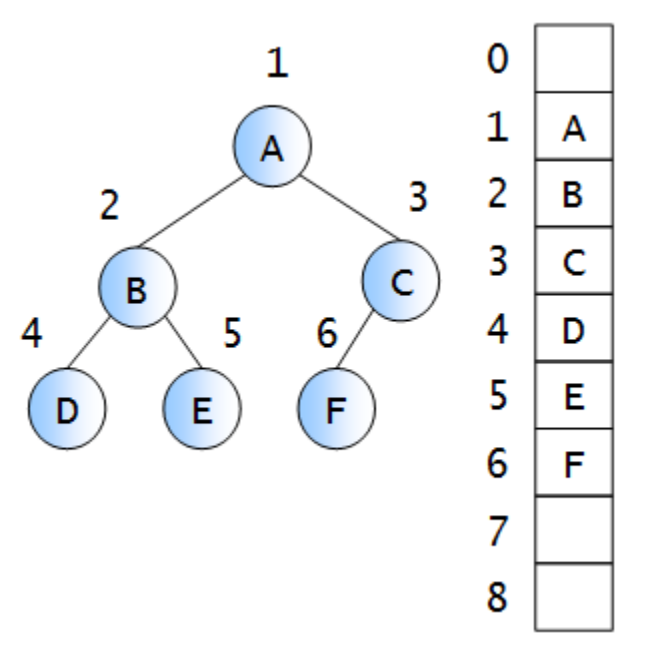
(a) 완전 이진 트리



(b) 경사 이진 트리

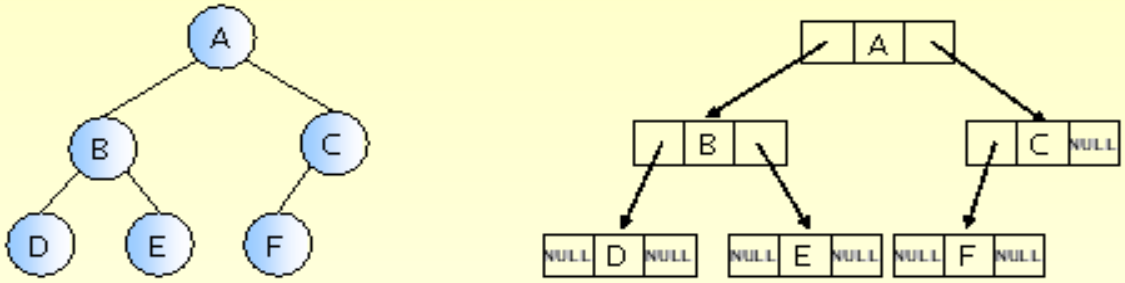
부모와 자식 인덱스 관계

- 노드 i의 부모 노드 인덱스 = i/2
- 노드 i의 왼쪽 자식 노드 인덱스 = 2i
- 노드 i의 오른쪽 자식 노드 인덱스 = 2i+1

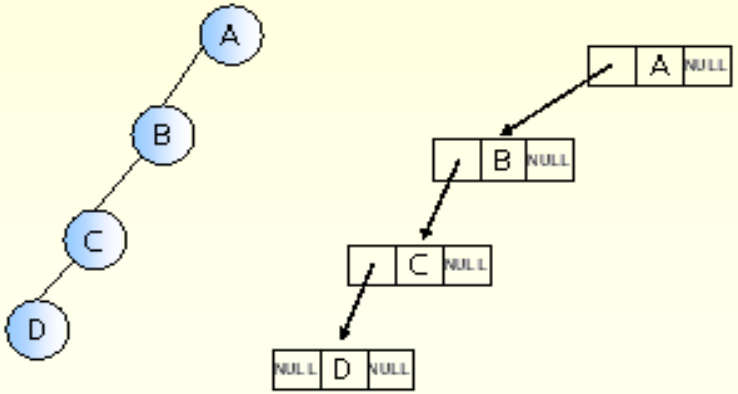


링크 표현법

- 링크 표현법: 포인터를 이용하여 부모노드가 자식노드를 가리키게 하는 방법



(a) 완전 이진 트리



(b) 경사 이진 트리

링크의 구현

- 노드는 구조체로 표현
- 링크는 포인터로 표현

```
typedef struct TreeNode {
        int data;
        struct TreeNode *left, *right;
} TreeNode;
```

링크 표현법 프로그램

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <memory.h>

typedef struct TreeNode {
            int data;
            struct TreeNode *left, *right;
} TreeNode;

//      n1
//     /  |
//  n2   n3

void  main()
{
  TreeNode *n1, *n2, *n3;

  n1= (TreeNode *)malloc(sizeof(TreeNode));
  n2= (TreeNode *)malloc(sizeof(TreeNode));
  n3= (TreeNode *)malloc(sizeof(TreeNode));
```

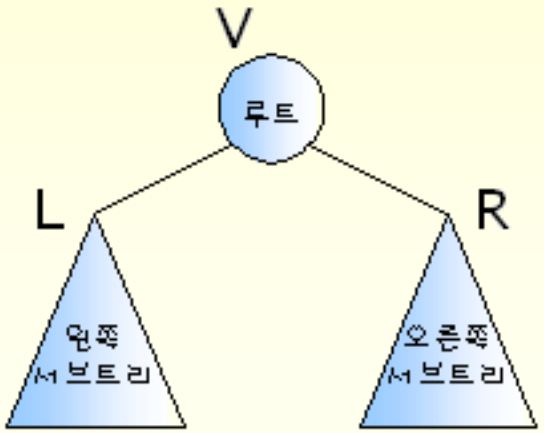
```
  n1->data = 10;    // 첫번째 노드를 설정한다.
  n1->left = n2;
  n1->right = n3;

  n2->data = 20;    // 두번째 노드를 설정한다.
  n2->right = NULL;

  n3->data = 30;    // 세번째 노드를 설정한다.
  n3->right = NULL;
}
```

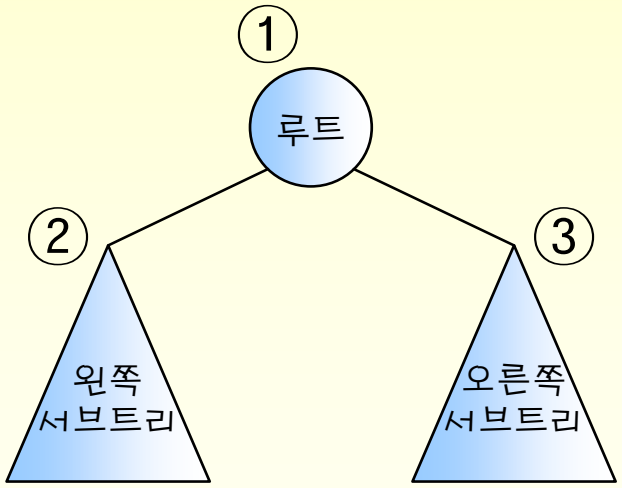
이진 트리의 순회

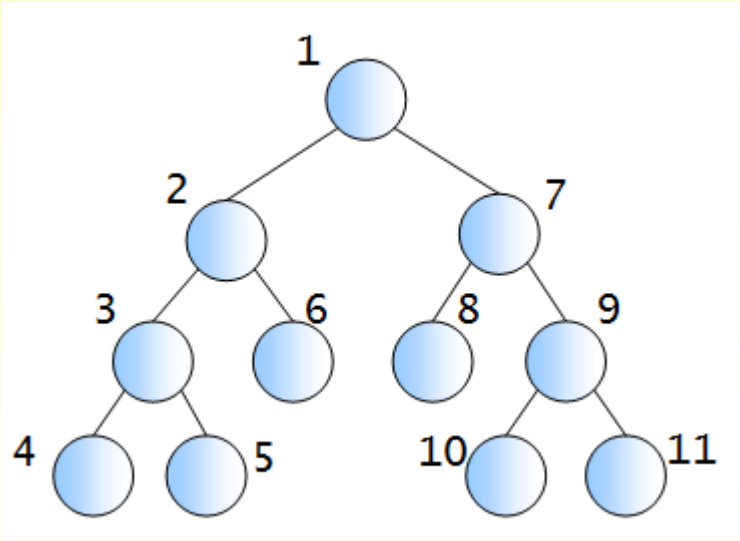
- 순회(traversal): 트리의 노드들을 체계적으로 방문하는 것
- 3가지의 기본적인 순회방법
  - 전위순회(preorder traversal) : VLR
    - 자손노드보다 루트노드를 먼저 방문한다.
  - 중위순회(inorder traversal) : LVR
    - 왼쪽 자손, 루트, 오른쪽 자손 순으로 방문한다.
  - 후위순회(postorder traversal) : LRV
    - 루트노드보다 자손을 먼저 방문한다.



전위 순회

1. 루트 노드를 방문한다
2. 왼쪽 서브트리를 방문한다
3. 오른쪽 서브트리를 방문한다





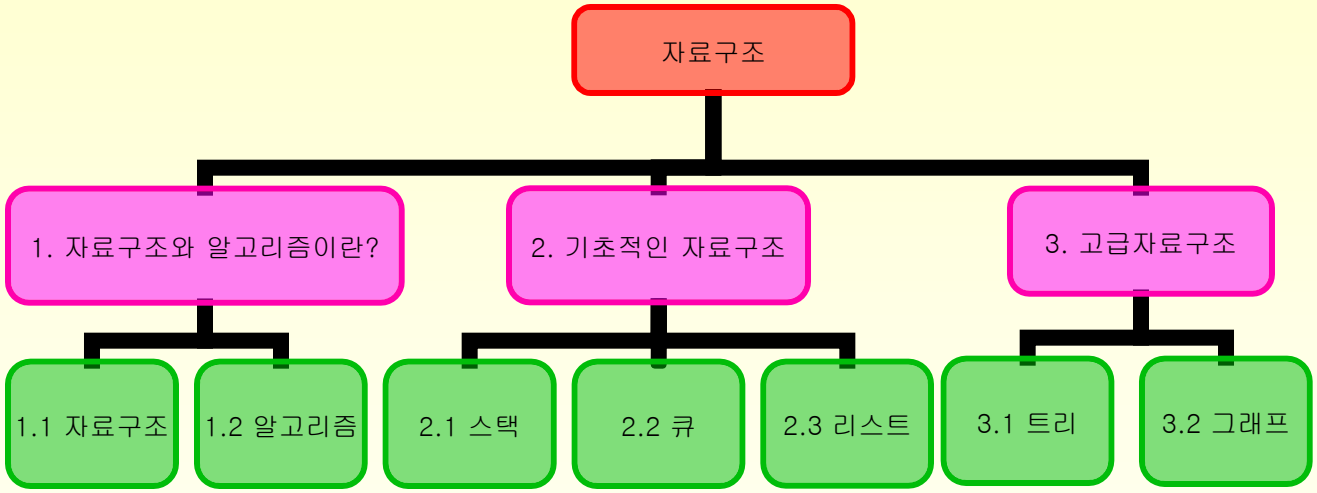
전위순회 프로그램

- 순환 호출을 이용한다.

```
preorder(x)
if x≠NULL
        then    print DATA(x);
                preorder(LEFT(x));
                preorder(RIGHT(x));
```

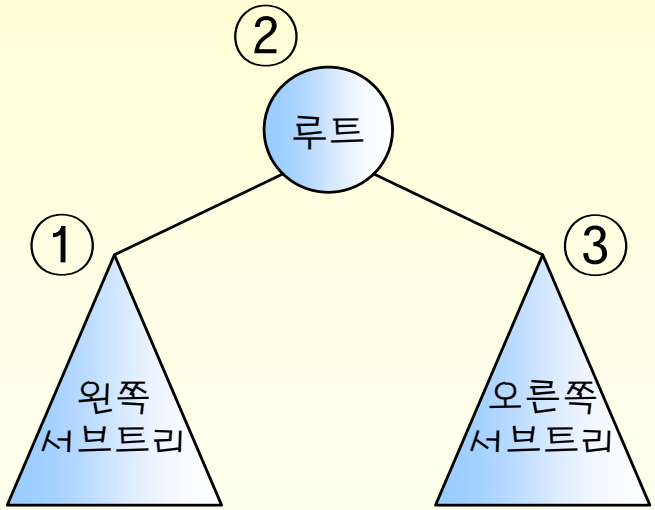
전위 순회 응용

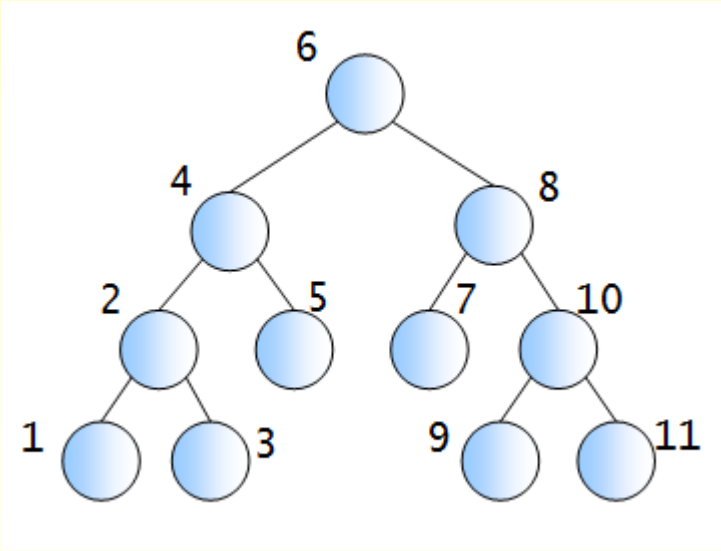
- (예) 구조화된 문서출력



중위 순회

1. 왼쪽 서브트리를 방문한다
2. 루트 노드를 방문한다
3. 오른쪽 서브트리를 방문한다





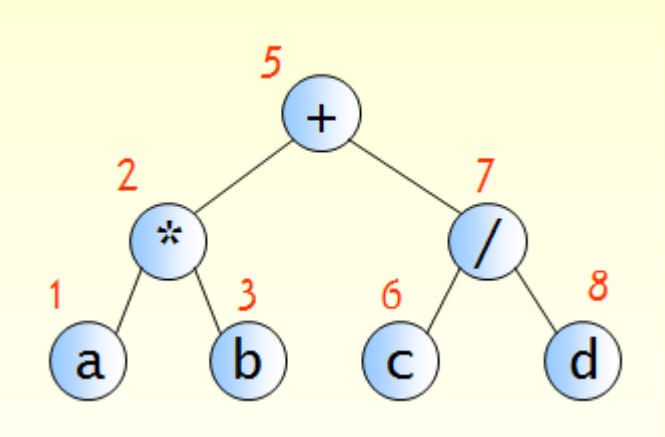
중위 순회 알고리즘

- 순환 호출을 이용한다.

```
inorder(x)
if x≠NULL
        then    inorder(LEFT(x));
                print DATA(x);
                inorder(RIGHT(x));
```

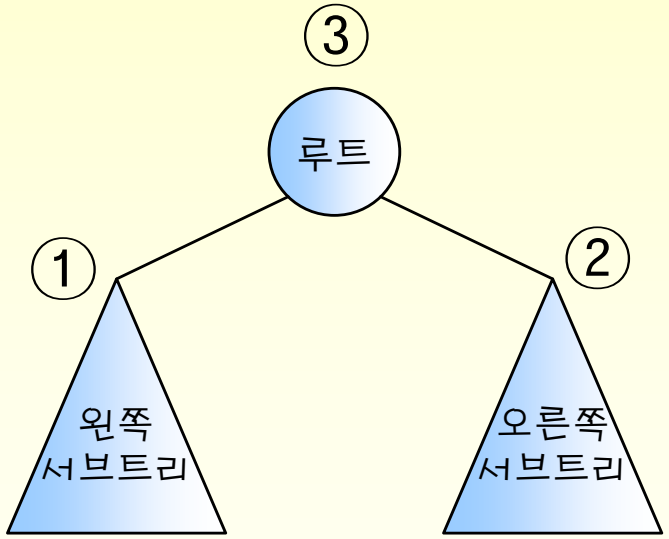
중위 순회 응용

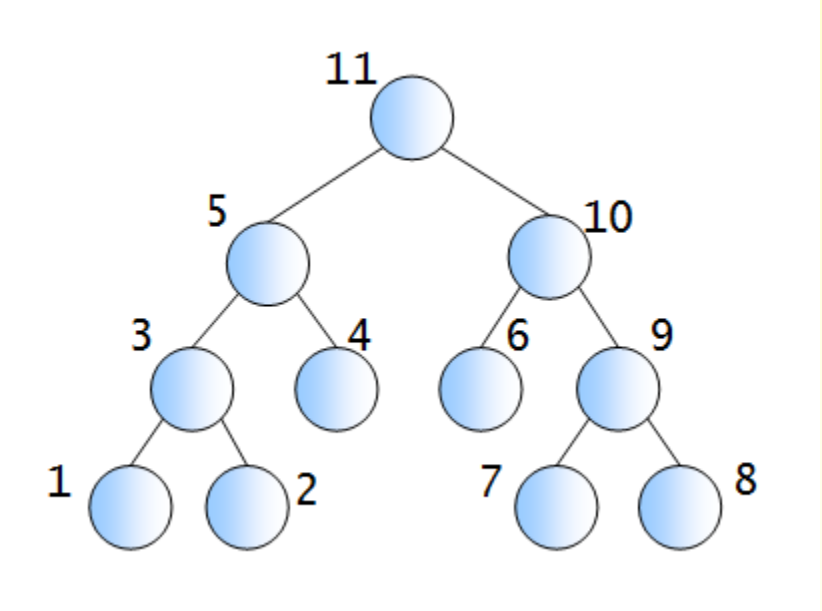
- (예) 수식 트리



후위 순회

1. 왼쪽 서브트리를 방문한다
2. 오른쪽 서브트리를 방문한다
3. 루트 노드를 방문한다





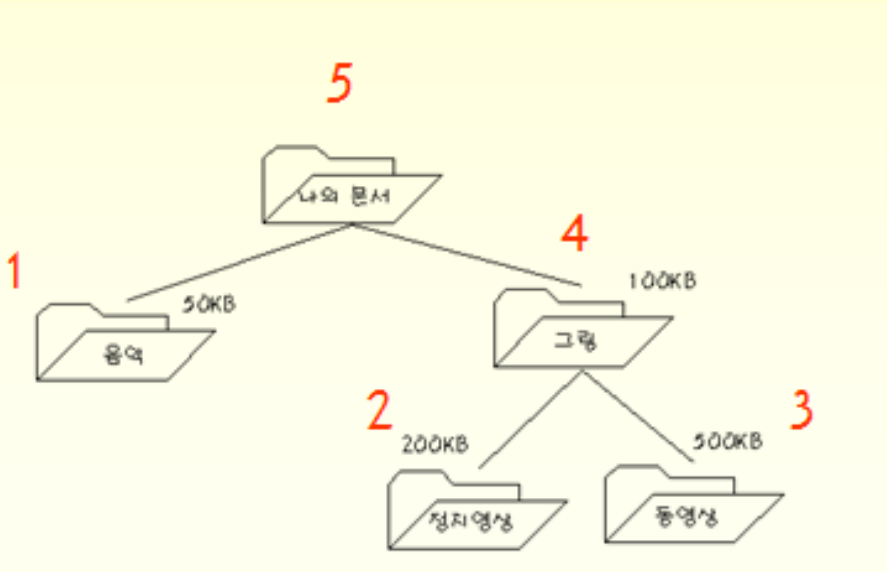
후위 순회 알고리즘

- 순환 호출을 이용한다.

```
postorder(x)
if x≠NULL
        then    postorder(LEFT(x));
                postorder(RIGHT(x));
                print DATA(x);
```

후위 순회 응용

- (예) 디렉토리 용량 계산



순회 프로그램

```
typedef struct TreeNode {
        int data;
        struct TreeNode *left, *right;
} TreeNode;
//                  15
//        4                   20
//        1                  16 25
TreeNode n1={1, NULL, NULL};
TreeNode n2={4, &n1, NULL};
TreeNode n3={16, NULL, NULL};
TreeNode n4={25, NULL, NULL};
TreeNode n5={20, &n3, &n4};
TreeNode n6={15, &n2, &n5};
TreeNode *root= &n6;
```

```
// 중위 순회
inorder( TreeNode *root ){
        if ( root ){
                inorder( root->left );          // 왼쪽서브트리 순회
                printf("%d", root->data );      // 노드 방문
                inorder( root->right );         // 오른쪽서브트리 순회
        }
}
// 전위 순회
preorder( TreeNode *root ){
        if ( root ){
                printf("%d", root->data );      // 노드 방문
                preorder( root->left );         // 왼쪽서브트리 순회
                preorder( root->right );        // 오른쪽서브트리 순회
        }
}
```

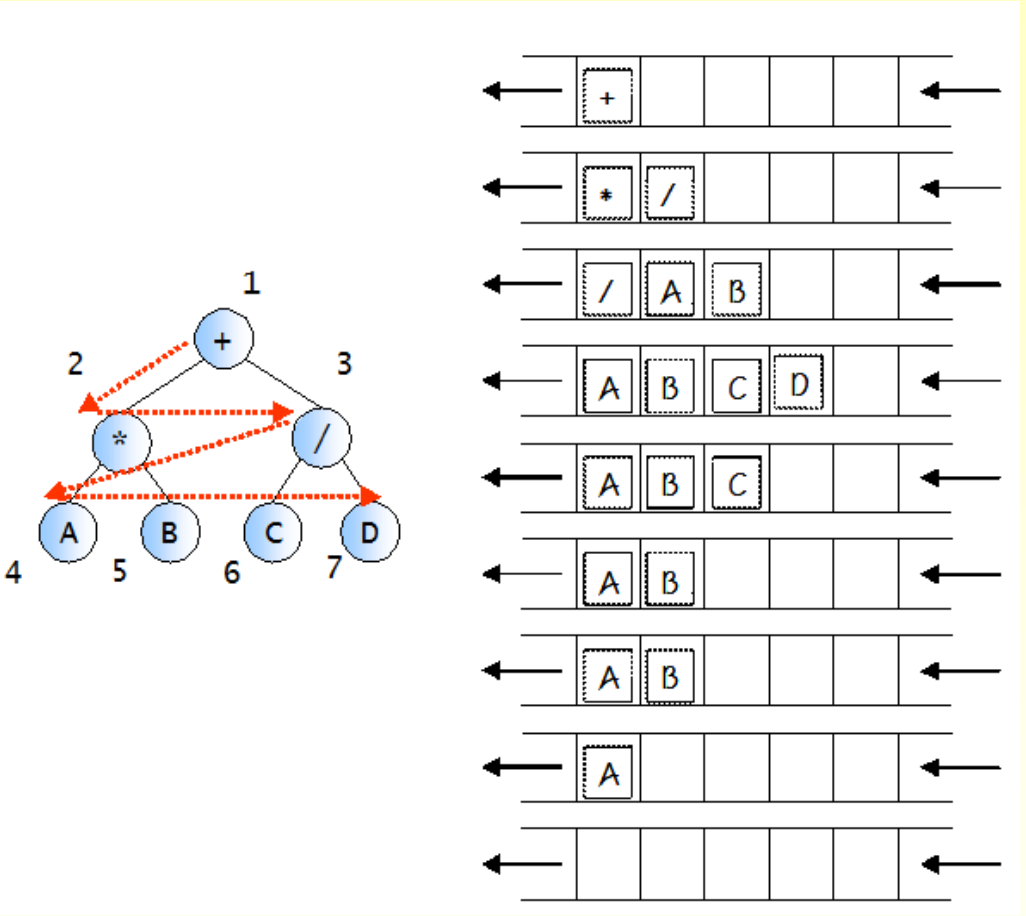
```
// 후위 순회
postorder( TreeNode *root ){
        if ( root ){
                postorder( root->left );        // 왼쪽서브트리 순회
                postorder( root->right );       // 오른쪽서브트리순회
                printf("%d", root->data );      // 노드 방문
        }
}

void main()
{
        inorder(root);
        preorder(root);
        postorder(root);
}
```

레벨 순회

- **레벨 순회(level order)**는 각 노드를 레벨 순으로 검사하는 순회 방법

- 지금까지의 순회 법이 스택을 사용했던 것에 비해 레벨 순회는 큐를 사용하는 순회 법이다.



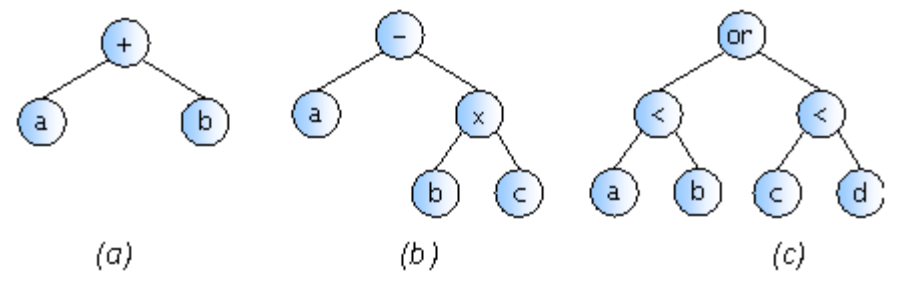
레벨 순회 알고리즘

- **level_order(root)**

```
1.  initialize queue;
2.  enqueue(queue, root);
3.  while is_empty(queue)≠TRUE do
4.        x← dequeue(queue);
5.        if( x≠NULL) then
6.              print DATA(x);
7.        enqueue(queue, LEFT(x));
8.        enqueue(queue, RIGHT(x));
```

수식 트리

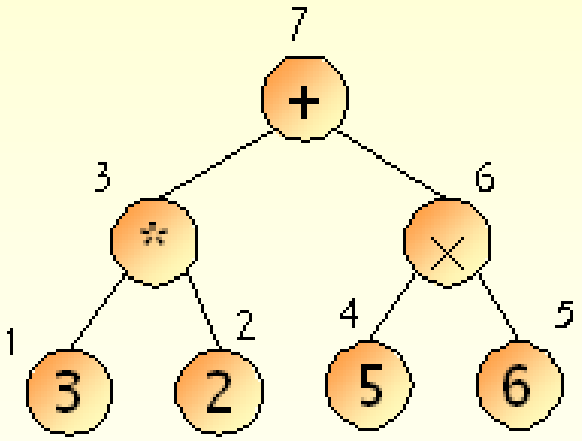
- 수식트리: 산술식을 트리형태로 표현한 것
  - 비단말노드: 연산자(operator)
  - 단말노드: 피연산자(operand)
- 예)



수식	a + b	a − (b × c)	(a < b) or (c < d)
전위순회	+ a b	− a × b c	or < a b < c d
중위순회	a + b	a − b × c	a < b or c < d
후위순회	a b +	a b c × −	a b < c d < or

수식 트리 계산

- 후위순회를 사용
- 서브트리의 값을 순환호출로 계산
- 비단말노드를 방문할 때 양쪽 서브트리의 값을 노드에 저장된 연산자를 이용하여 계산한다



수식 트리 알고리즘

```
evaluate(exp)

1.  if exp = NULL
2.    then return 0;
3.    else x←evaluate(exp->left);
4.         y←evaluate(exp->right);
5.         op←exp->data;
6.         return (x op y);
```

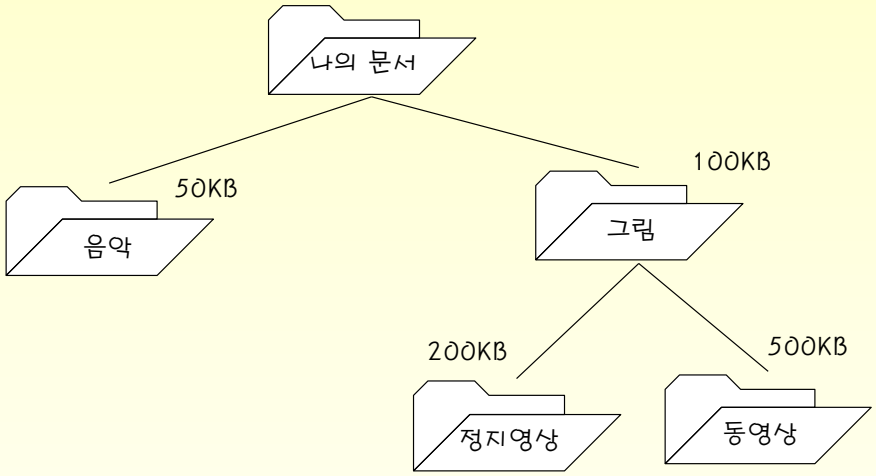
프로그램

```
typedef struct TreeNode {
        int data;
        struct TreeNode *left, *right;
} TreeNode;
//                  +
//        *                   +
//        1 4                 16 25
TreeNode n1={1, NULL, NULL};
TreeNode n2={4, NULL, NULL};
TreeNode n3={'*', &n1, &n2};
TreeNode n4={16, NULL, NULL};
TreeNode n5={25, NULL, NULL};
TreeNode n6={'+', &n4, &n5};
TreeNode n7={'+', &n3, &n6};
TreeNode *exp= &n7;
```

```
int evaluate(TreeNode *root)
{
        if( root == NULL)
                return 0;
        if( root->left == NULL && root->right == NULL)
                return root->data;
        else {
                int op1 = evaluate(root->left);
                int op2 = evaluate(root->right);
                switch(root->data){
                case '+':   return op1+op2;
                case '-':   return op1-op2;
                case '*':   return op1*op2;
                case '/':   return op1/op2;
                }
        }
        return 0;
}
void main()
{
        printf("%d", evaluate(exp));
}
```

디렉토리 용량 계산

- 디렉토리의 용량을 계산하는데 후위 트리 순회 사용



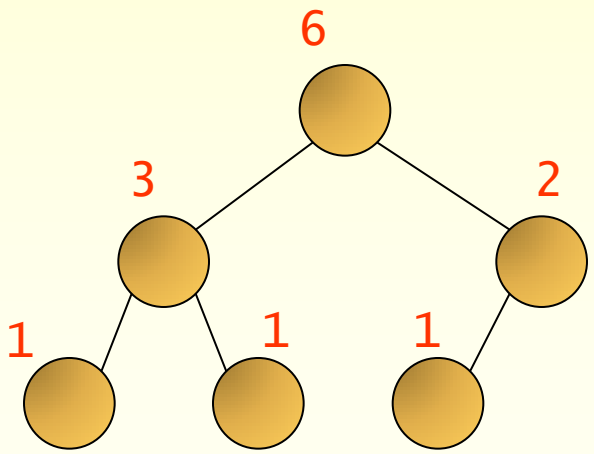
디렉토리 용량 계산 프로그램

```
int calc_direc_size(TreeNode *root)
{
        int left_dir, right_dir;
        if ( root ){
                left_size = calc_size( root->left );
                right_size = calc_size(root->right );
                return (root->data+left_size+right_size);
        }
}
void main()
{
        TreeNode n4={500, NULL, NULL};
        TreeNode n5={200, NULL, NULL};
        TreeNode n3={100, &n4, &n5};
        TreeNode n2={50, NULL, NULL};
        TreeNode n1={0, &n2, &n3};
        printf("디렉토리의 크기=%d\n",calc_direc_size(&n1));
}
```

이진 트리 연산: 노드 개수

- 탐색 트리안의 노드의 개수를 계산
- 각각의 서브트리에 대하여 순환 호출한 다음, 반환되는 값에 1을 더하여 반환

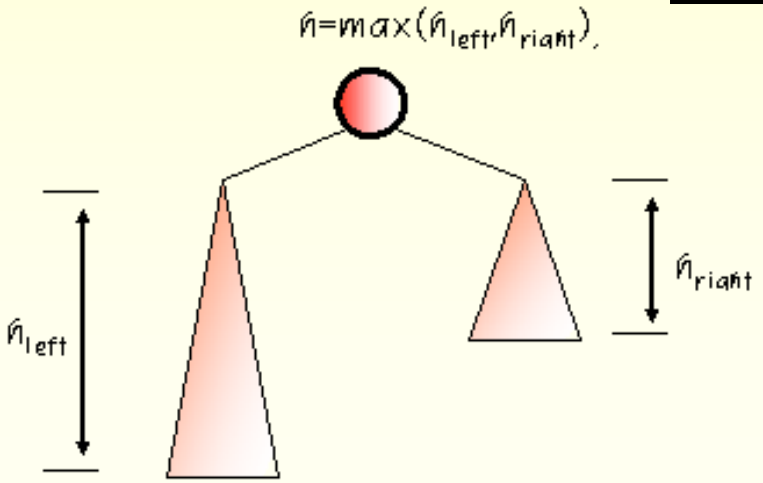
```
int get_node_count(TreeNode *node)
{
  int count=0;
  if( node != NULL )
    count = 1 + get_node_count(node->left)+
                get_node_count(node->right);
  return count;
}
```



이진 트리 연산: 높이

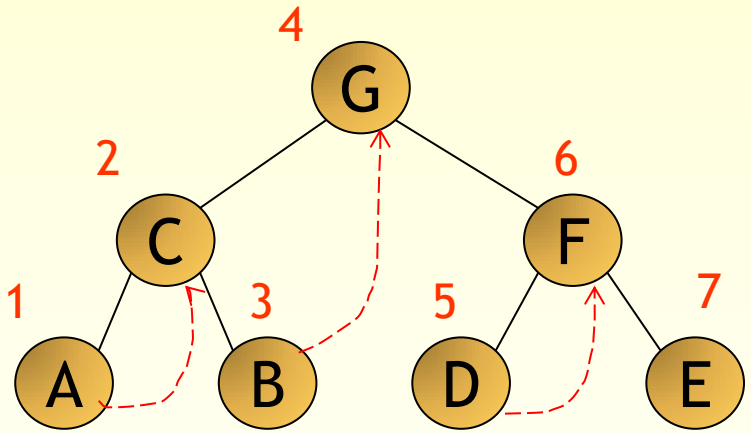
- 서브트리에 대하여 순환 호출하고 서브 트리들의 반환값 중에서 최대값을 구하여 반환

```
int get_height(TreeNode *node)
{
  int height=0;
  if( node != NULL )
     height = 1 + max(get_height(node->left),
                      get_height(node->right));
  return height;
}
```



스레드 이진 트리

- 이진트리의 NULL 링크를 이용하여 순환 호출 없이도 트리의 노드들을 순회
- NULL 링크에 중위 순회시에 후속 노드인 **중위 후속자(inorder successor)**를 저장시켜 놓은 트리가 **스레드 이진 트리(threaded binary tree)**



스레드 이진 트리의 구현

- 단말노드와 비단말노드의 구별을 위하여 is_thread 필드 필요

```
typedef struct TreeNode {
        int data;
        struct TreeNode *left, *right;
        int is_thread; //만약 오른쪽 링크가 스레드이면 TRUE
} TreeNode;
```

스레드 이진 트리의 구현

- 중위 후속자를 찾는 함수 작성

```
//
TreeNode *find_successor(TreeNode *p)
{
        // q는 p의 오른쪽 포인터
        TreeNode *q = p->right;
        // 만약 오른쪽 포인터가 NULL이거나 스레드이면 오른쪽 포인터를 반환
        if( q==NULL || p->is_thread == TRUE)
                return q;
        // 만약 오른쪽 자식이면 다시 가장 왼쪽 노드로 이동
        while( q->left != NULL ) q = q->left;
        return q;
}
```

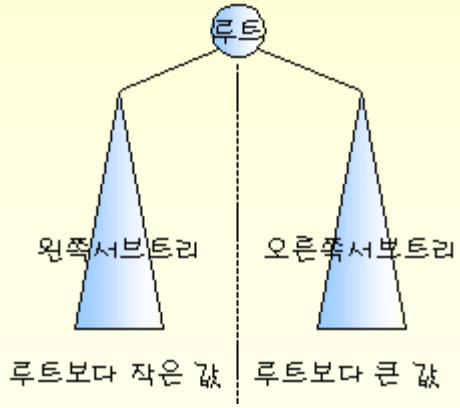
스레드 이진 트리의 구현

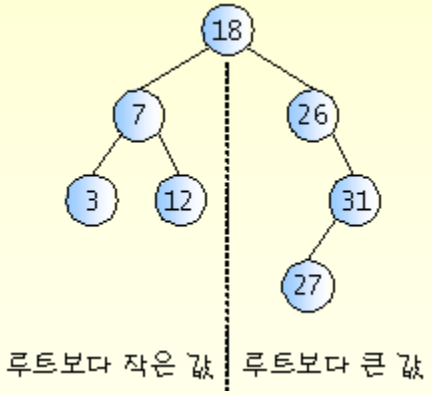
- 스레드 버전 중위 순회 함수 작성

```
void thread_inorder(TreeNode *t)
{
        TreeNode *q;
        q=t;
        while (q->left) q = q->left;// 가장 왼쪽 노드로 간다.
        do
        {
                printf("%c ", q->data);// 데이터 출력
                q = find_successor(q); // 후속자 함수 호출
        } while(q);                                    // NULL이 아니면
}
```

이진탐색트리

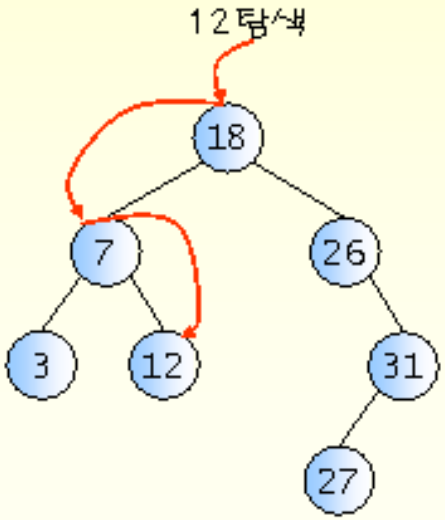
- 탐색작업을 효율적으로 하기 위한 자료구조
- key(왼쪽서브트리)≤key(루트노드)≤key(오른쪽서브트리)
- 이진탐색를 중위순회하면 오름차순으로 정렬된 값을 얻을 수 있다.





이진탐색트리에서의 탐색연산

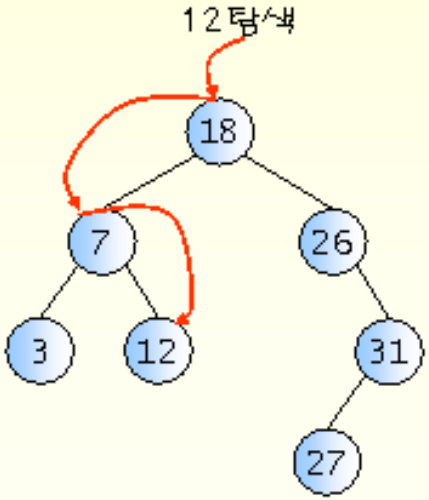
- 비교한 결과가 같으면 탐색이 성공적으로 끝난다.
- 비교한 결과가, 주어진 키 값이 루트 노드의 키값보다 작으면 탐색은 이 루트 노드의 왼쪽 자식을 기준으로 다시 시작한다.
- 비교한 결과가, 주어진 키 값이 루트 노드의 키값보다 크면 탐색은 이 루트 노드의 오른쪽 자식을 기준으로 다시 시작한다.



이진탐색트리에서의 탐색연산

```
search(x, k)

if x=NULL
                then return NULL;
if k=x->key
                then return x;
else if k<x->key
     then return search(x->left, k);
     else return search(x->right, k);
```



탐색을 구현하는 방법

- 순환적 방법
- 반복적 방법

순환적인 방법

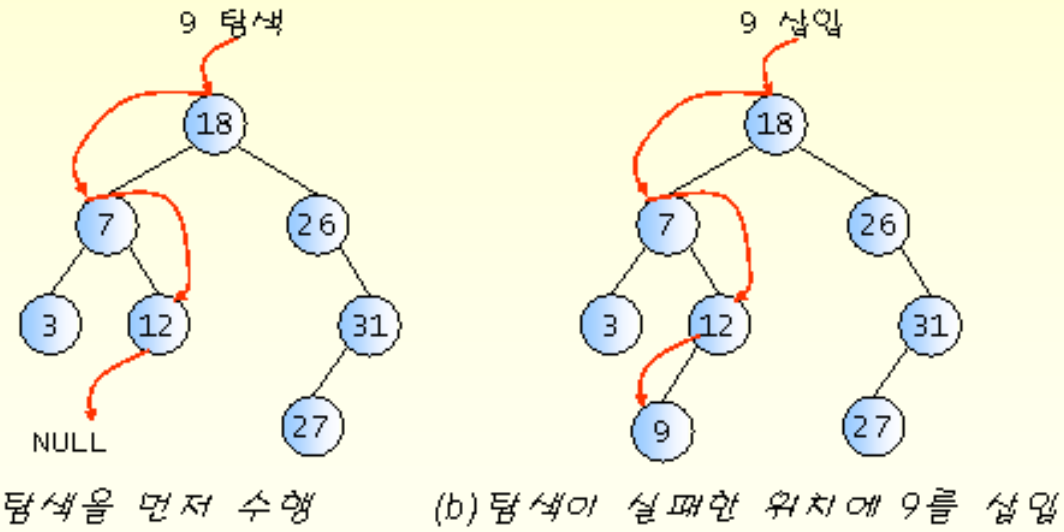
```
//순환적인 탐색 함수
TreeNode  *search(TreeNode  *node,  int  key)
{
     if ( node == NULL )  return NULL;
     if ( key == node->key ) return node;     (1)
     else if ( key < node->key )
          return  search(node->left, key);     (2)
     else
          return  sear ch(node->right, key);  (3)
}
```

반복적인 방법

```
// 반복적인 탐색 함수
TreeNode *search(TreeNode *node, int key)
{
        while(node != NULL){
         if( key == node->key ) return node;
         else if( key < node->key )
                node = node->left;
         else
                node = node->right;
        }
        return NULL;        // 탐색에 실패했을 경우 NULL 반환
}
```

이진탐색트리에서의 삽입연산

- 이진 탐색 트리에 원소를 삽입하기 위해서는 먼저 탐색을 수행하는 것이 필요
- 탐색에 실패한 위치가 바로 새로운 노드를 삽입하는 위치



(a) 탐색을 먼저 수행 (b) 탐색이 실패한 위치에 9를 삽입

이진탐색트리에서의 삽입연산

```
insert_node(T,z)

p←NULL;
t←root;
while t≠NULL do
  p←t;
  if z->key < p->key
      then t←p->left;
      else t←p->right;
if p=NULL
  then root←z;                    // 트리가 비어있음
  else if z->key < p->key
          then p->left←z
          else p->right←z
```

이진탐색트리에서의 삽입연산

```
// key를 이진 탐색 트리 root에 삽입한다.
// key가 이미 root안에 있으면 삽입되지 않는다.
void insert_node(TreeNode **root, int key)
{
        TreeNode *p, *t; // p는 부모노드, t는 현재노드
        TreeNode *n;             // n은 새로운 노드
        t = *root;
        p = NULL;
        // 탐색을 먼저 수행
        while (t != NULL){
            if( key == t->key ) return;
            p = t;
            if( key < t->key ) t = t->left;
            else t = t->right;
        }
```

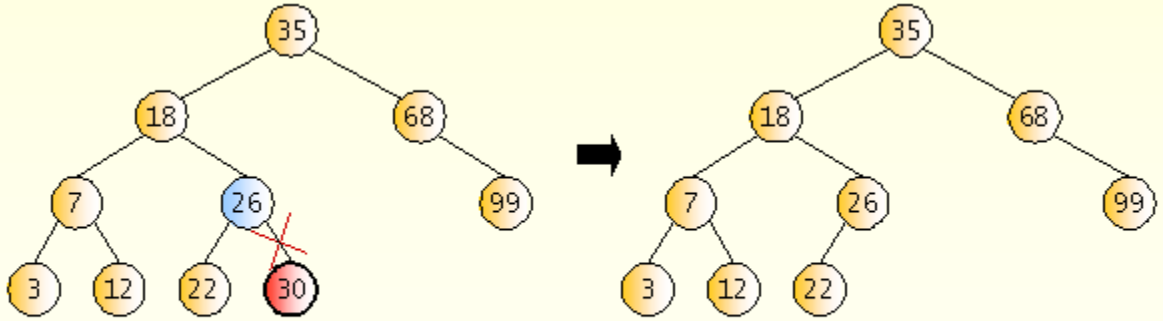
이진탐색트리에서의 삽입연산

```
        // key가 트리 안에 없으므로 삽입 가능
        n = (TreeNode *) malloc(sizeof(TreeNode));
        if( n == NULL ) return;
        // 데이터 복사
        n->key = key;
        n->left = n->right = NULL;
        // 부모 노드와 링크 연결
        if( p != NULL )
                if( key < p->key )
                        p->left = n;
                else p->right = n;
        else *root = n;
}
```

이진탐색트리에서의 삭제연산

- 3가지의 경우
  1. 삭제하려는 노드가 단말 노드 일 경우
  2. 삭제하려는 노드가 하나의 왼쪽이나 오른쪽 서브 트리 중 하나만 가지고 있는 경우
  3. 삭제하려는 노드가 두개의 서브 트리 모두 가지고 있는 경우

- CASE 1: 삭제하려는 노드가 단말 노드일 경우: 단말노드의 부모노드를 찾아서 연결을 끊으면 된다.

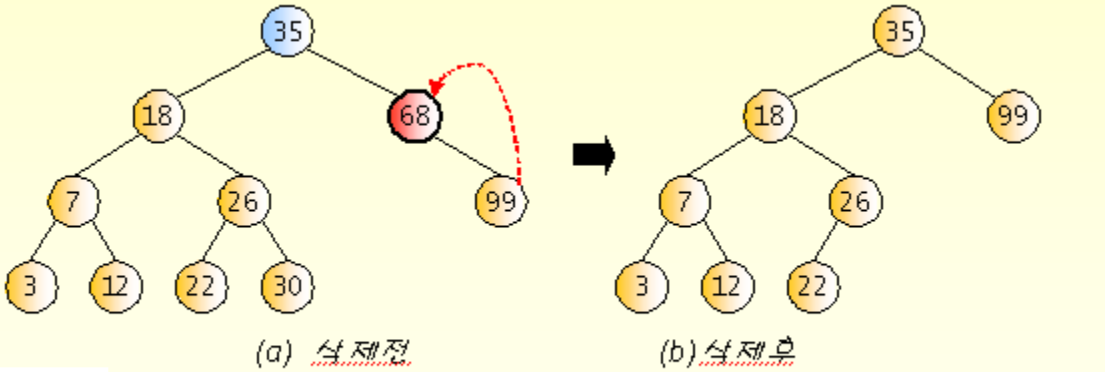


(a) 삭제전 (b) 삭제후

이진탐색트리의 삭제연산: 삭제노드가 단말노드인 경우

이진탐색트리에서의 삭제연산

- CASE 2:삭제하려는 노드가 하나의 서브트리만 갖고 있는 경우 :
  삭제되는 노드가 왼쪽이나 오른쪽 서브 트리중 하나만 갖고 있을 때, 그 노드는 삭제하고 서브 트리는 부모 노드에 붙여준다.

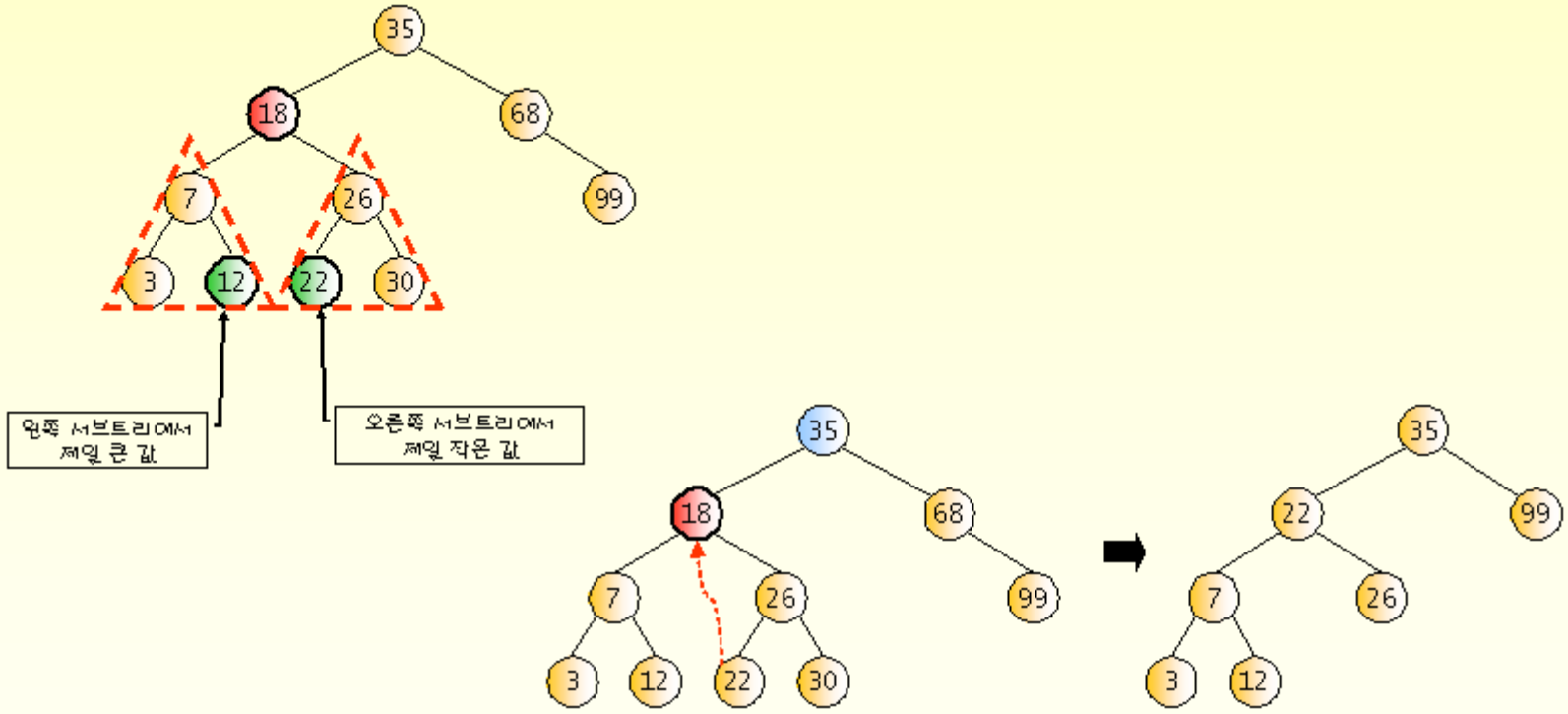


(a) 삭제전 (b)삭제후

이진탐색트리의 삭제연산: 삭제노드가 하나의 서브트리를 가지고 있는 경우

이진탐색트리에서의 삭제연산

- CASE 3:삭제하려는 노드가 두개의 서브트리를 갖고 있는 경우: 삭제 노드와 가장 비슷한 값을 가진 노드를 삭제노드 위치로 가져온다.



```
// 삭제 함수
void delete_node(TreeNode **root, int key)
{
TreeNode *p, *child, *succ, *succ_p, *t;
// key를 갖는 노드 t를 탐색, p는 t의 부모노드
p = NULL;
t = *root;
// key를 갖는 노드 t를 탐색한다.
while( t != NULL && t->key != key ){
        p = t;
        t = ( key < t->key ) ? t->left : t->right;
}
// 탐색이 종료된 시점에 t가 NULL이면 트리안에 key가 없음
if( t == NULL ) {          // 탐색트리에 없는 키
        printf("key is not in the tree");
        return;
}
```

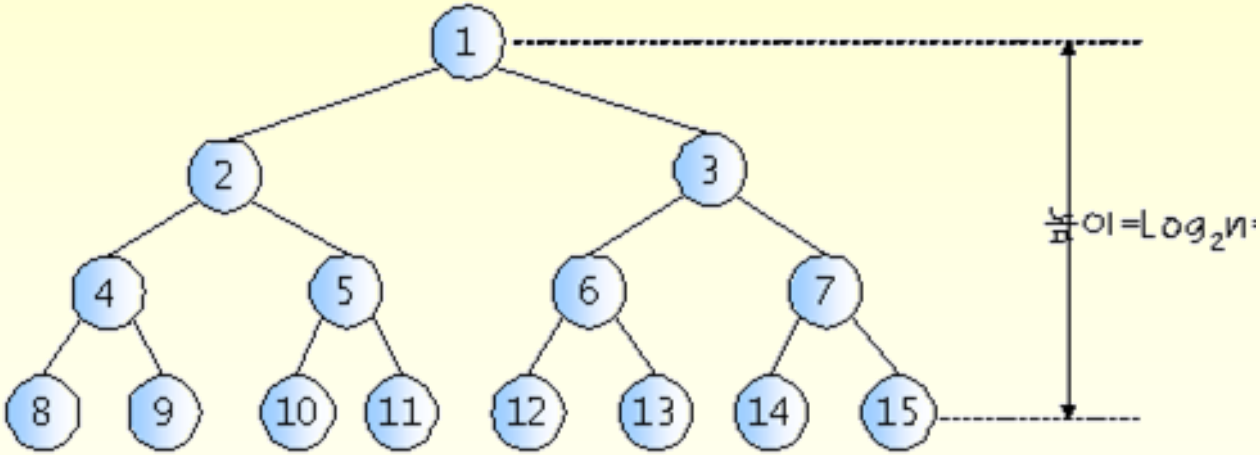
```
// 첫번째 경우: 단말노드인 경우
if( (t->left==NULL) && (t->right==NULL) ){
        if( p != NULL ){
                // 부모노드의 자식필드를 NULL로 만든다.
                if( p->left == t )
                        p->left = NULL;
                else p->right = NULL;
        }
        else        // 만약 부모노드가 NULL이면 삭제되는 노드가 루트
                *root = NULL;
}
```

```
// 두번째 경우: 하나의 자식만 가지는 경우
else if((t->left==NULL)||(t->right==NULL)){
        child = (t->left != NULL) ? t->left : t->right;
        if( p != NULL ){
                if( p->left == t )          // 부모를 자식과 연결
                        p->left = child;
                else p->right = child;
        }
        else // 만약 부모노드가 NULL이면 삭제되는 노드가 루트
                *root = child;
}
```

```
// 세번째 경우: 두개의 자식을 가지는 경우
else{
        // 오른쪽 서브트리에서 후계자를 찾는다.
        succ_p = t;
        succ = t->right;
        // 후계자를 찾아서 계속 왼쪽으로 이동한다.
        while(succ->left != NULL){
                succ_p = succ;
                succ = succ->left;
        }
        // 후속자의 부모와 자식을 연결
        if( succ_p->left == succ )
                succ_p->left = succ->right;
        else
                succ_p->right = succ->right;
        // 후속자가 가진 키값을 현재 노드에 복사
        t->key = succ->key;
        // 원래의 후속자 삭제
        t = succ;
}
free(t);
}
```

이진탐색트리의 성능분석

- 이진 탐색 트리에서의 탐색, 삽입, 삭제 연산의 시간 복잡도는 트리의 높이를 h라고 했을때 h에 비례한다



이진탐색트리의 성능분석

- 최선의 경우
  - 이진 트리가 균형적으로 생성되어 있는 경우
  - $h=\log_2 n$
- 최악의 경우
  - 한쪽으로 치우친 경사이진트리의 경우
  - $h=n$
  - 순차탐색과 시간복잡도가 같다.